线性反问题正则参数的迭代解法

1．反问题简介

自20世纪60年代以来，在地球物理，生命科学，材料科学，遥感技术，模式识别，信号和图象处理，工业控制乃至经济决策等众多的科学技术领域中，都提出了“由效果、表现反求原因、原象”的反问题，通称“数学物理反间题”。

数学物理反问题是一个新兴的研究领域，有别于传统的数学物理方程的定解问题，反间题研究由解的部分已知信息来求解问题中的某些未知量。用系统论的语言来讲，正问题对应于给定系统在已知输入条件下求输出结果的问题，这些输出结果当然包含了系统的某些信息。而反问题则是由输出结果的部分信息来反求系统的某些结构特征。与正问题相比，求解数学物理反问题面临的两个本质性的实际困难分别是：

（1）原始数据可能不属于所论问题精确解所对应的数据集合，因而在经典意义下的近似解可能不存在；

（2）近似解的不稳定性，也就是说原始资料的小的观测误差会导致近似解与真解的严重偏离。

既然反问题常常是不适定的，也就是我们通常所说的Hadamard意义下不适定。Hadamard在1923年提出在经典意义下适定问题要满足下述三个条件：

（1）该问题的解是存在的；（2）该问题的解是唯一的；（3）该问题的解对输入数据是稳定的。

上述三个适定的条件在理论上具有严密性，但是对于实际间题，我们当然期望解是存在唯一的，在实际获取的数据资料总是不可能是精确的，因此在实际中更多的时候要面对不适定的问题。

对不适定问题，若方法选取的不好，将得不到合理的解.基于实际应用问题的推动，数学物理反间题的求解已发展了许多方法，如脉冲谱技术(PST)，广义脉冲谱技术(GPST)，最佳摄动量法，蒙特卡罗方法(Monte Carlo Method)以及各种优化方法和正则化方法等。其中，最具普遍性、在理论上最完备而且行之有效的方法，就是由著名学者Tikhonov提出的处理不适定问题的正则化方法。正则化方法的基本思想是：利用具体问题的某些附加信息对不适定问题的解的概念重新定义，进而引进正定泛函给出一个逼近原问题解的稳定方法，正则化方法已经成为处理数学物理反问题的一个有力工具。

2．正则化方法

正则化方法是处理不适定问题的有效工具，正则化方法的目的是在尽可能的保证近似解的稳定性基础上尽可能多的保留解的信息。简言之，正则化方法就是用一系列“邻近，适定的问题来逼近不适定问题。从而，如何构造“邻近”问题，如何控制与原问题的“邻近”程度而决定与原问题的误差水平相匹配的正则化参数以及它们的数值的实现是正则化理论和方法的核心问题。

下面介绍适定性的定义。

假设和是范数空间，是一个映射，方程当满足如下几条要求是，则被称为适定。

（1）存在性，即对任何存在满足；

（2）唯一性，即对任何至多存在一个满足；

（3）稳定性，解连续依赖。

在此基础上，简单介绍一下Tikhonov正则化方法。

考虑具有如下形式的线性算子问题：



其中*A*是由Hilbert空间到Hilbert空间的有界线性算子，方程（1.1）的最小二乘解满足方程，其中是的共轭算子，又因为具有非负的特征值，因此对于任意正数，具有严格正的特征值，于是方程



是适定的。通过适当选取值，用方程（1.2）的解作为原适定问题（1.1）的解的近似值。方程（1.2）称为方程（1.1）的正则式形式，并称为（1.2）的唯一解 为正则解，这就是经典的Tikhonov正则化方法。

3．正则化参数选取策略

正则化参数的选择始终是正则化理论中一个重要而有魅力的研究课题，因为正则解与精确解之间的误差与正则化参数的选择紧密相关，因此正则化方法的有效性很大程度上依赖于正则化参数的合理选取。

简单来看，目前正则化参数的选取方法可分为两大类，先验的和后验的。假设我们事先已经知道关于精确解的信息，例如其光滑程度，则可取正则化参数，这样得到的结果可以达到最优收敛速度。但是在通常情况下，我们并不知道精确解的任何信息，则只能通过后验方法来选取正则化参数。一般来说，有两大类后验的办法，一种是已知关于右端的扰动水平占，则可以通过对残量的估计来求解正则化参数，Morozov偏差准则就是这种方法的典型例子；还有一种后验选取正则化参数的办法是Error-Free方法，就是在不知道扰动误差占的情况下，通过给定的扰动右端及正则化方法本身的特性来求解正则化参数!州.不少先验的方法具有理论分析的作用，但是在实际中往往难以验证其赖以使用的条件，因而关于确定正则化参数的后验方法是比较实用的。

关于正则化参数的选择，很多理论上的研究策略主要集中在纯理论层面，这些策略的具体数值应用却很少，其中的一个原因是这些方法要求数据误差的水平在实际应用中很难实现。常见的后验正则化参数选取方法有偏差准则法和Error-Free法，下面仅以偏差准则法为例，举例说明计算方法。

偏差准则是一种后验选取正则化参数的方法，通常利用如下公式来定义参数



其中是一个常量，是的近似值。由于泛函是从左端连续的，所以（1.3）有极大值，从而有对于



若对都有，那么有，此时在一定意义上，可以理解为当时的极限且，所以偏差准则和已知误差水平来确定正则化的参数。

4．正则化三阶迭代解法

考虑现阶段常用的偏差原理和三阶迭代法为基本工具，提出一种三阶收敛的迭代求解线性反问题中的正则化参数方法。

4.1 基础理论

随着Morozov准则的提出，许多基于Morozov准则基础上的合理选取正则化参数的方法也逐步发展起来。比如受Hebden拟牛顿法的影响，Ito和Kullisch提出一个含有四个参数的模型函数方法来求解一类非线性反问题的正则化参数。Kunisch和Zou提出迭代方法和双参数模型函数的方法来选取线性反间题中的正则化参数.这其中最主要的工具就是熟知的Morozov偏差原理。

这些方法的基础都是Morozov准则，利用Morozov准则得到一个关于正则化参数的非线性方程，然后利用迭代法或者其他的数值方法来求解线性方程。

4.2 迭代策略

迭代法是计算中很重要的方法，是求解方程或方程组的一类基本的方法。迭代法是一种逐次逼近的方法，其基本思想是使用某个固定的公式反复来校正根的近似值，从而得到一个近似解的序列，使得该序列的极限就是方程的解。

一般情况下，解Morozov方程的三阶迭代方法求解过程如下，主要有三种方法，具体的表达式如下。

对于方程



Chebyshev方法。给定一个初值，通过



产生迭代序列 ，其中。

Halley方法。给定一个初值，通过



产生迭代序列 ，其中。

Super-Halley方法。给定一个初值，通过



产生迭代序列 ，其中。

4.3 收敛性分析

收敛性证明仅以Chebyshev方法为例，简单说明如下。

由于是无穷次可微的，所以迭代函数



也是可微的。设是方程的解，那么依据相关引理，分别求解其一阶导数、二阶导数和三阶导数。



通过上式可知，。



通过上式可知，。

而



所以，该方法是三阶收敛的。同样，可以对其他方法进行分析。

4.4 数值实验结果分析

和传统的二阶牛顿法相比，通过迭代法选取的正则化参数更具有优越性。

假设椭圆方程的两点边值问题：



在这个间题中我们已知的是函数，要求的是解，而因为观测原因会有一个小扰动，的一个小扰动会对的求解产生很大的影响。

在实际计算中，我们使用分片线性有限元方法来求解上述问题(3.1)。为此，我们首先把区域均匀的分成*N*等份，结点设为。定义是跟上述剖分相关的连续分片线性有限元空间。取*h*=1/*N*.设 是 的子空间且满足。

通过把区间进行等分100份，依次计算相应的值，得到迭代后的结果。如果给定一个初值再把这种关系代到变分方程中去就可以得到的有限元近似,再利用上面提到的迭代法就可以迭代算出,再利用可以迭代计算以此类推进行计算。

在同样的收敛条件下，三阶迭代法收敛只需要5~7步，明显小于二阶牛顿法。

5．结论

通过上述的公式说明和计算，可以知道，在处理实际不适定的问题时，三阶迭代法具有速度快和准确性高的特点。尤其在处理复杂度较高，时效性要求强的问题中，比如电力系统分析下，具有很强的实用价值。

参考文献

1. 肖庭延,于慎根,王彦飞,反问题的数值解法,科学出版社,2003.
2. 刘继军,不适定问题的正则化方法及应用,科学出版社,2005
3. 曾哲昭,文卉,数值计算,清华大学出版社,2005
4. Karl Kunisch, Jun Zou. Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems. Inverse Problems, 14:1247-1264,1988
5. 张宁,典则TSVD方法及其相关问题,上海大学硕士学位论文,2003